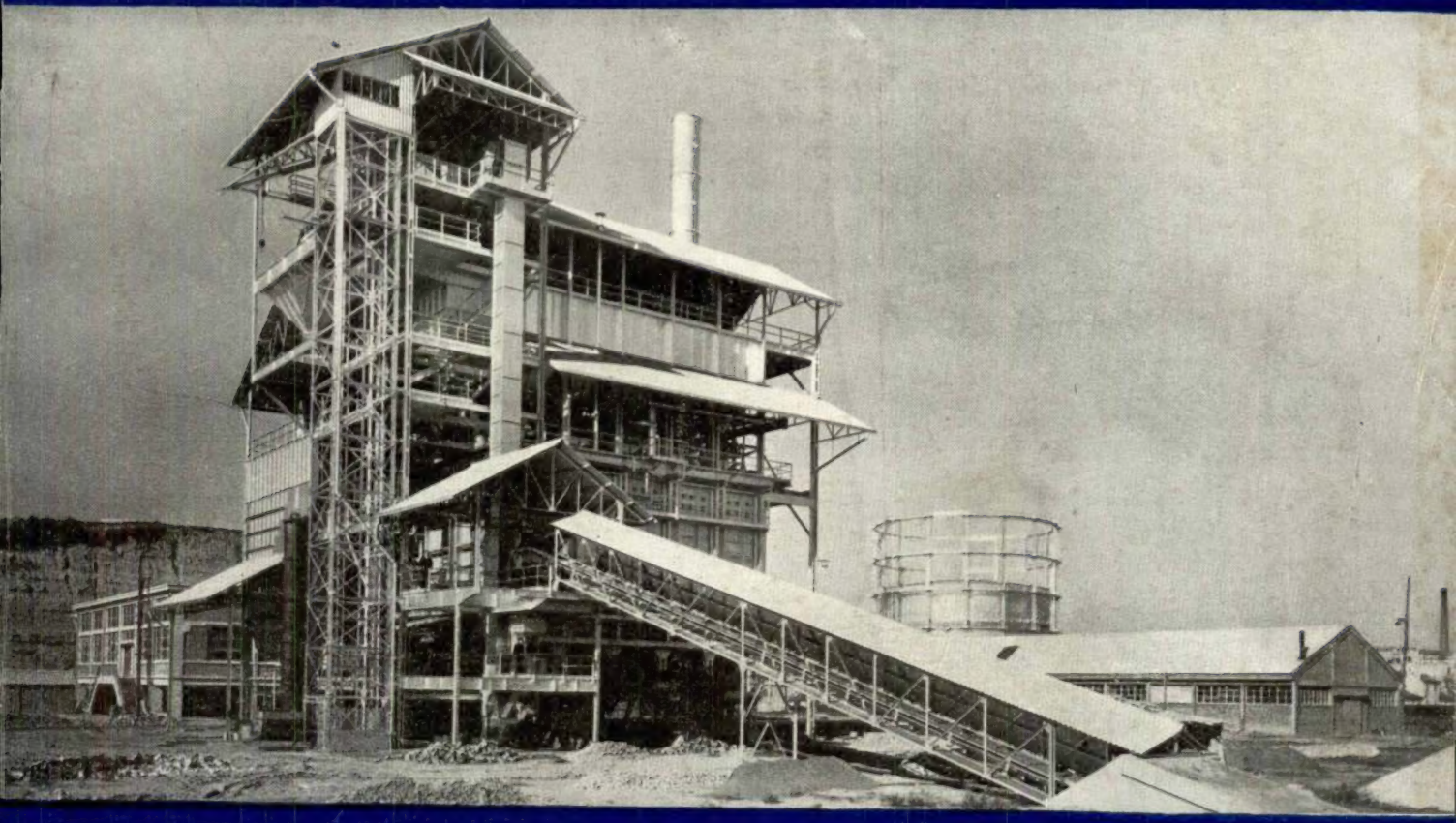
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 139-Junho-1943

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMERCIO, 56, 3.º
LISBOA

Granulados de mármores
para exportação e para o país

Mosaicos de granulados de mármore

OS MAIS BONITOS
OS MAIS RESISTENTES
OS MAIS VANTAJOSOS

Soc. Portuguesa CAVAN

Rua D. Estefania, 42
Telefone 47812 — Lisboa

FILIAL NO PÔRTO:
PRAÇA DA BATALHA, 90, 2.º

Cimento «Liz» hidrofugado «N»

PRÓPRIO PARA
IMPERMEABILIZAÇÃO DE OBRAS
REBOCOS, FUNDAÇÕES, PAREDES, ETC.

Substitue com vantagem de ordem técnica e económica todos os impermeabilizadores conhecidos.

Em sacos de papel de 50 quilos

Peçam instruções para o seu emprêgo

Sede: Rua do Cais de Santarém, 64, 1.º — LISBOA
Filial: Rua de Santo António, 190-A, 1.º — PORTO

Agentes em todo o País

NÚMERO
139
Junho — 1943

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
LUIZ DE ALMEIDA ALVES
ADMINISTRADOR
JOSÉ DE LUCENA
BIBLIOTECÁRIO
FAUSTO GONÇALVES HENRIQUES
CORPO REDACTORIAL
Fernando Moitinho de Almeida
Henrique Dias Barracas
José Carlos Pinheiro da Silva
Manuel dos Santos Rézio

NÚMERO AVULSO 5$00
ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	13$50	26$00	50$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	35$00	60$00
Estrangeiro...	—	40$00	70$00

EDITOR E PROPRIETARIO
ASS. DOS ALUNOS DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Instalações da Nova Fábrica de Gás da Matinha — Edifício dos Fornos

Págs.

Estudo das estruturas hiperestáticas pelos teoremas de Castigliano e pelo método de Beggs Eng.º Civil Manuel Rocha . . 365

O tabuleiro das pontes tipo «Bow-string» de betão armado Eng.º Civil Edgar Cardoso . . 393

Notes sur le séisme du 25 Novembre 1941 . . . . . Dr. M. T. Antunes. 415

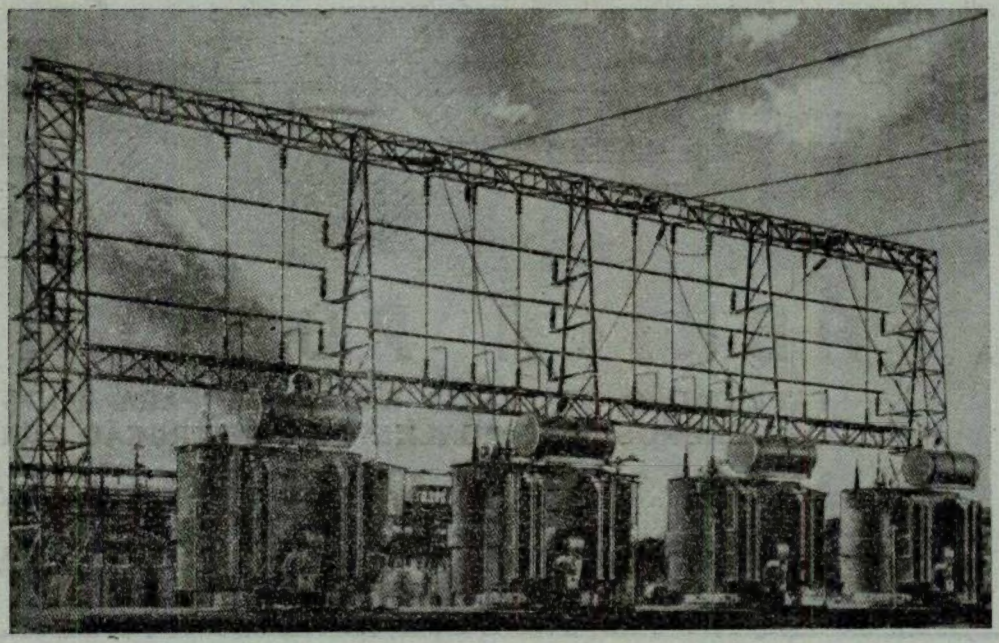
Intersectar, Intersecção, Interseptar, Intersepção. 420

Publicações recebidas 422

STABILO
STABILO
STABILO
STABILO
STABILO
SCHWAN
Bleistift-Fabrik A.-G.
NÜRNBERG
Representante:
A. Ferreira da Silva, Porto.
Rua Alexandre Braga, 82. Tel. 6132
Lápis de desenho
em 18 graduações 7 B — 9 H
Lápis de côr
O utensílio precioso em 24 côres
Novidade: STABILO Cellomin D. R. P.
O lápis-tinta com a mina especial
resistente às influências climáticas

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Sub-estação ao ar livre de 25.000 kVA, 220.000 volts

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Instalações para melhorar o factor potência. Tracção eléctrica. Máquinas, Transformadores e Electrodos para soldadure eléctrica. Fornos eléctricos. Automotoras eléctricas e Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Condutores eléctricos. Electrificação de fábricas. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc. Máquinas frigoríficas. Emissores e receptores para T. S. F. Aparelhagem de Electro-Medicina. Instalações de Som.

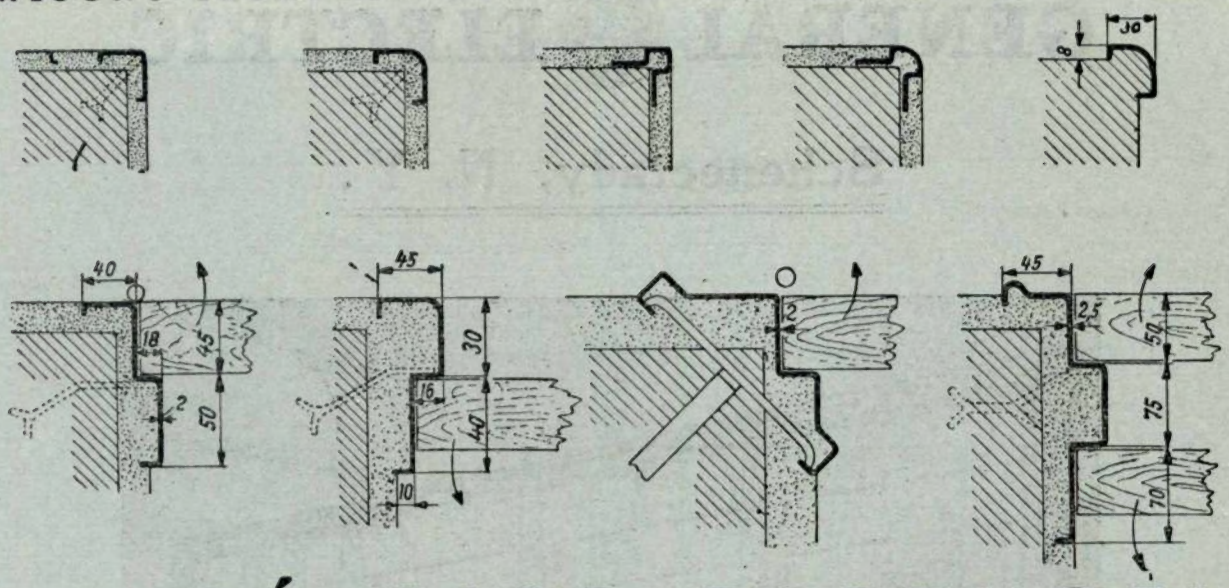
THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

ALGUNS EXEMPLOS DOS PERFIS QUE SE PODEM REALIZAR



LISBOA **FÁBRICA PORTUGAL**

FABRICAÇÃO DE PERFIS DE CHAPA PARA TODOS OS GENEROS DE TRABALHO DE CONSTRUÇÃO CIVIL

UMA REVOLUÇÃO NA CONSTRUÇÃO CIVIL

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas

Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico

Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.

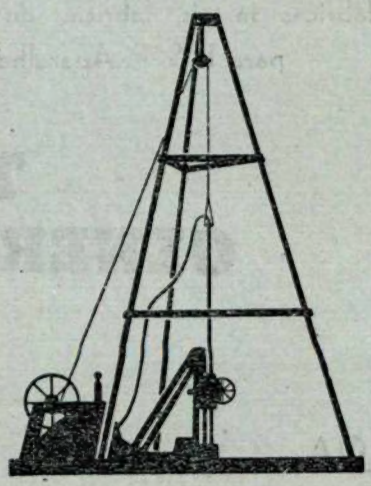
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo

Rebocos comprimidos por «cement gun»

Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no paiz e no estrangeiro



Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2.º--LISBOA Tel. 2 8685

TÉCNICA
LUIZ DE ALMEIDA ALVES
DIRECTOR

ANO XVIII - N.º 139 JUNHO 1943

Estudo das estruturas hiperestáticas pelos teoremas de Castigliano e pelo método de Beggs[1]

PELO ENG.º CIVIL (I. S. T.) MANUEL ROCHA
ASSISTENTE DO I. S. T.
BOLSEIRO DO I. A. C.

Aparte pequenas modificações a matéria dêste artigo constituíu uma das partes dum curso livre feito pelo autor no I. S. T. durante o ano lectivo de 1941-42.

1) Lei de Hook

Consideremos um corpo sólido, de forma qualquer, impossibilitado de movimento de conjunto, isto é, fixado de tal modo que os seus pontos só podem deslocar-se à custa da deformação do sólido. Dum modo geral as construções encontram-se nestas condições de fixação desde que os apoios não sofram assentamentos.

Sejam F_1, F_2,... F_i,... F_k,... F_n as grandezas das fôrças actuantes, segundo direcções determinadas, em pontos P_1, P_2,... P_i,...P_k,... P_n do sólido fixado, por exemplo, em três pontos A_1, A_2 e A_3 (fig. 1).

Devido à aplicação do sistema de fôrças o ponto P_i passa para uma posição P'_i; designemos por $\vec{D}_i$ o deslocamento $P'_i - P_i$; seja d_i a projecção dêste deslocamento sôbre uma direcção qualquer dada Δ_i.

A lei de Hook afirma que, quando F_1, F_2,... F_n estão compreendidos entre certos valores, a projecção

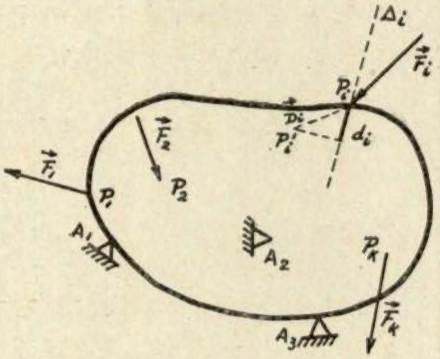


Fig. 1

(1) Indicações bibliográficas: «Theory of Elasticity» por R. V. Southwell (Oxford Press, Londres); «Résistance des Matériaux», por L. Baes (M. Lamertin, Bruxelas); «Strength of Materials» por S. Timoshenko (D. V. Nostrand Cp., Nova York); «Strength of Materials» por Case (Arnold, Londres); «Estática Aplicada» por Saliger (Labor, Madrid).

d_i é dada pela expressão:

$$1) \qquad d_i = a_{i1} F_1 + a_{i2} F_2 + \dots + a_{ii} F_i + \dots + a_{ik} F_k + \dots + a_{in} F_n ,$$

onde $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{ik}, \dots a_{in}$ são constantes designadas *coeficientes de influência*; a_{ik} é o coeficiente de influência da fôrça $\vec{F}_k$ no deslocamento de P_i na direcção Δ_i. Estes números a_{ik} dependem da substância e forma do corpo, das direcções das fôrças aplicadas e das direcções Δ_i.

A lei de Hook pode ser enunciada do seguinte modo: *os deslocamentos projectados são funções lineares e homogéneas das grandezas das fôrças aplicadas segundo direcções determinadas.*

Dum modo geral a lei só é válida quando as grandezas, que podem ser positivas ou negativas, das fôrças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n$ estão compreendidas entre certos valores, ou, o que é o mesmo, quando os deslocamentos não ultrapassam certos limites, além dos quais os deslocamentos projectados já não são funções lineares e homogéneas de $F_1, F_2, \dots F_n$.

A lei de Hook pode aplicar-se a um ponto no qual não actua fôrça alguma. Assim se $F_i = 0$ subsistirá a expressão 1) com o têrmo $a_{ii} F_i$ nulo.

Da expressão 1) concluímos que se as fôrças deixarem de actuar ($F_1 = F_2 \dots = F_n = 0$) é $d_i = 0$, isto é, a lei de Hook impõe a elasticidade perfeita do corpo; quere dizer, quando as fôrças deixam de actuar o corpo retoma a forma inicial.

No estado actual da Teoria da Elasticidade e da Resistência de Materiais os coeficientes de influência nem sempre podem ser calculados com a precisão necessária, tendo por vezes de se recorrer à experiência para a sua determinação.

Deve notar-se que para corpos constituídos por numerosas substâncias que interessam ao construtor, tais como o ferro fundido, o betão, as madeiras e os solos de fundação, a lei de Hook só traduz uma primeira aproximação da lei que relaciona os deslocamentos projectados com as grandezas das fôrças aplicadas. Nesta lei intervêm mesmo, por vezes, outras variáveis como o tempo, o estado higrométrico, etc.

A forma com que foi apresentada a lei de Hook não é tão simples como a forma habitual, mas tem a virtude de conter, como se verá na alínea seguinte, muitas afirmações gerais cujo conhecimento tem grande interêsse no ensino técnico.

2) Aplicações e conseqüências da lei de Hook.

a) Consideremos um corpo qualquer, por exemplo o sistema de arcos assentes sôbre pilares representado na fig. 2, submetido à acção duma fôrça $\vec{F}_1$ aplicada no ponto P_1.

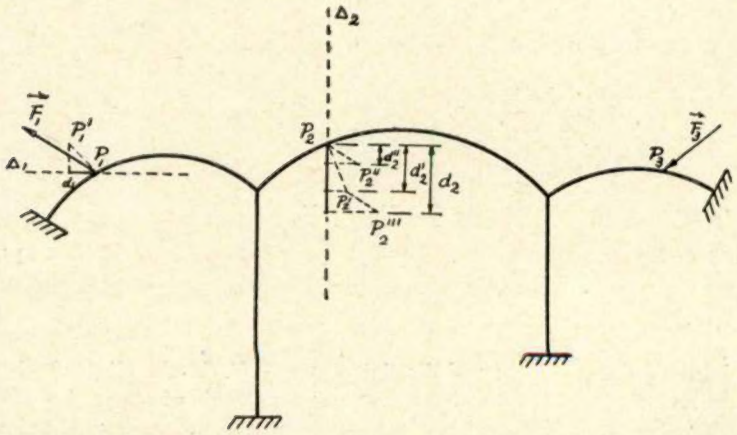


Fig. 2

Sejam, $\vec{D}'_2 = P'_2 - P_2$ o deslocamento dum ponto qualquer P_2 e d'_2 a projecção dêste deslocamento numa direcção qualquer Δ_2, por exemplo, a da vertical; o deslocamento projectado é então designado flecha.

Em virtude da lei de Hook podemos escrever:

2) $$d'_2 = a_{21} F_1 .$$

Donde se tira a seguinte conseqüência muito importante da lei de Hook: *o deslocamento projectado, por exemplo a flecha, dum ponto dum sólido submetido à acção duma fôrça é proporcional à grandeza desta fôrça.*

Para obtermos experimentalmente o valor do coeficiente de influência a_{21}, basta aplicar ao sólido, ou a um modêlo, uma fôrça $\vec{F}_1$ e medirmos (com um deflectómetro) o deslocamento d'_2; é:

$$a_{21} = \frac{d'_2}{F_1} .$$

A determinação por via analítica dos coeficientes de influência é, em geral, muito trabalhosa porque implica o estudo da deformação do sólido; o coeficiente a_{21} calcula-se determinando o valor do deslocamento d'_2 devido a uma fôrça unitária com a direcção e sentido de $\vec{F}_1$.

Devido à aplicação da fôrça $\vec{F}_1$ o deslocamento de P_1 projectado sôbre uma direcção qualquer Δ_1, por exemplo, sôbre a direcção da horizontal existente no plano do sólido, é também proporcional a F_1:

$$d_1 = a_{11} F_1 .$$

b) Suponhamos agora o sólido da fig. 2 submetido, sòmente, à acção duma fôrça $\vec{F}_3$ actuante num ponto P_3. O ponto P_2 passa para uma posição P''_2. A projecção d''_2 do deslocamento $P''_2 - P_2$ do ponto P_2, é proporcional a F_3:

3) $$d''_2 = a_{23} F_3 .$$

Consideremos agora o sólido submetido simultâneamente à acção das fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$; o deslocamento de P_2, $P'''_2 - P_2$, projectado sôbre a direcção da vertical, é dado pela expressão:

4) $$d_2 = a_{21} F_1 + a_{23} F_3 .$$

De 2), 3) e 4) conclui-se que:

$$d_2 = d'_2 + d''_2 ,$$

isto é, a projecção sôbre uma dada direcção, do deslocamento dum ponto dum sólido submetido à acção de duas fôrças, é igual à soma das projecções, sôbre essa mesma direcção, dos deslocamentos sofridos pelo ponto quando o sólido está sujeito separadamente a cada uma das fôrças.

Esta conseqüência importantíssima da lei de Hook pode generalizar-se imediatamente para um número qualquer de fôrças actuantes. É designada correntemente por *princípio da sobreposição*, que pode ser enunciado brevemente do seguinte modo: *o deslocamento projectado (por exemplo flecha) é igual à soma dos deslocamentos projectados (flechas) devidos a cada uma das fôrças.*

c) Consideremos um sólido obedecendo à lei de Hook. Quando lhe aplicamos um sistema de fôrças, a distância L entre dois pontos quaisquer P_1 e P_2 sofre uma variação ΔL. Vamos mostrar que ΔL é uma função linear e homogénea das grandezas das fôrças actuantes.

Para isso projectemos os deslocamentos de P_1 e P_2 sôbre a direcção do segmento $P_1 P_2$.

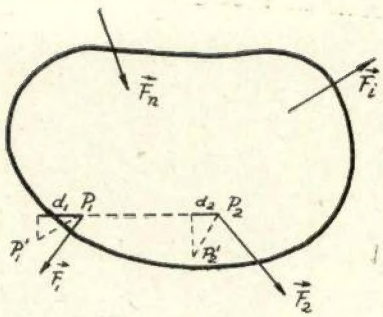


Fig. 3

Vem:

$$d_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + \dots + a_{1n} F_n$$

e

$$d_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + \dots + a_{2n} F_n .$$

Visto serem muito pequenas as deformações que satisfazem à lei de Hook, podemos supor:

$$\Delta L = d_1 - d_2 ,$$

donde:

$$\Delta L = (a_{11} - a_{21}) F_1 + (a_{12} - a_{22}) F_2 + \dots + (a_{1n} - a_{2n}) F_n ,$$

como queríamos provar.

Se considerarmos um segmento infinitesimal qualquer dum sólido concluímos, a partir dêste resultado, que a sua extensão unitária é também uma função linear e homogénea das grandezas das fôrças actuantes.

d) Apliquemos agora a lei de Hook ao caso duma barra prismática submetida a uma tracção.

Consideremos dois pontos A e B à distância L, medida paralelamente às geratrizes, e suponhamos fixa (1) a secção que passa por A.

Em virtude da lei de Hook podemos afirmar que a projecção *d* de deslocamento de B na direcção das geratrizes é proporcional a F, quando F está compreendido entre certos limites:

$$d = a F ,$$

onde *a* é uma constante que depende da substância e forma do corpo.

A experiência mostra que neste caso o deslocamento de B se dá paralelamente às geratrizes, isto é, $d = \Delta L$, sendo ΔL a variação da distância L, e que a constante *a* é proporcional a L e inversamente proporcional à secção S da peça:

$$a = \frac{1}{E} \frac{L}{S} ,$$

sendo E uma constante que depende sòmente da substância da peça e que se chama *módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young*. Vem:

$$\Delta L = \frac{1}{E} \frac{L}{S} F ,$$

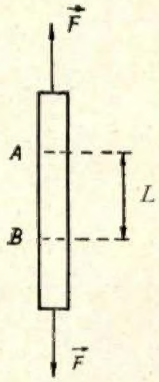


Fig. 4

donde:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L} \quad \text{e} \quad E = \frac{F . L}{S . \Delta L} .$$

Donde se conclui que o enunciado geralmente dado da lei de Hook é um caso particular do que demos.

3) Observações à lei de Hook

Na expressão da lei de Hook:

$$d_i = a_{i1} F_1 + \dots + a_{ik} F_k + \dots + a_{in} F_n ,$$

(1) Isto é, vamos considerar os deslocamentos em relação a um sistema de referência ligado a um elemento de área da secção transversal da peça que passa por A.

d_i é a projecção numa certa direcção do deslocamento que sofre o ponto P_i, quando se aplica ao corpo o sistema de fôrças $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$.

Ainda nada dissemos àcêrca da maneira como podem ser aplicadas as fôrças, isto é, àcêrca da maneira como elas podem variar desde 0 até atingirem os valores finais $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$.

Se as fôrças forem aplicadas bruscamente ao corpo, produzir-se-ão vibrações e o deslocamento projectado d_i será variável. Pois bem, as fôrças podem ser aplicadas de qualquer modo desde que o d_i seja o valor da projecção do deslocamento de P_i quando se atinja o estado de repouso.

Há ainda outra observação a fazer.

Quando um sistema de fôrças actua sôbre um sistema material, quer seja um sólido ou um fluído, a evolução do sistema é acompanhada de trocas de calor entre as diferentes partes do sistema e entre êste e o meio ambiente; os fenómenos supostos puramente mecânicos não são mais do que simplificações de fenómenos termodinâmicos, que são aqueles que de facto se dão na natureza.

Assim, tal como no caso da expansão dum gás, a extensão dum fio metálico submetido a uma fôrça $\vec{F}$, aplicada num dos seus extremos P, dá origem a trocas de calor com o meio exterior e, em geral, a temperatura do fio variará.

Fig. 5

Mas a variação da temperatura do fio acarreta uma variação do seu comprimento e portanto o alongamento observado quando aplicamos $\vec{F}$, isto é, o deslocamento do ponto P depende das trocas de calor que se derem.

Se a fôrça $\vec{F}$ atingir bruscamente o seu valor final, então podem desprezar-se as quantidades de calor trocadas entre o fio e o meio ambiente, isto é, pode supor-se a extensão do fio como adiabática; tal como no caso da expansão adiabática dum gás, a temperatura do fio baixará. A termodinâmica mostra que êste abaixamento de temperatura é proporcional à tensão a que o fio está submetido; para uma tensão de 1000 kg/cm² o abaixamento de temperatura é cêrca de 0°,16 C., no caso do fio ser de aço.

Se após a tracção adiabática o fio retomar a temperatura ambiente, êle sofrerá uma variação unitária de comprimento igual a $0{,}16 \times 10^{-5}$, tomando o coeficiente de dilatação linear do aço igual a 10^{-5}. O alongamento unitário do fio imediatamente após a aplicação de $\vec{F}$, tomando o módulo de elasticidade igual a 2×10^6 kg/cm², é $\frac{1000}{2 \times 10^6} = 0{,}0005$.

Portanto o alongamento complementar do fio devido ao restabelecimento do equilíbrio térmico com o ambiente é sòmente:

$$\frac{0{,}16 \times 10^{-5}}{0{,}0005} \simeq \frac{1}{300}$$

do alongamento produzido pela aplicação brusca da fôrça $\vec{F}$.

Vê-se portanto que mesmo neste caso limite da tracção adiabática é muito pequena a variação de temperatura do corpo que se deforma. Se a aplicação da fôrça não se fizer duma maneira suficientemente brusca haverá trocas de calor e portanto a variação de temperatura e o conseqüente alongamento complementar ainda serão menores.

Dum modo geral, desde que se mantenha constante a temperatura ambiente, são muito pequenas as variações de temperatura e portanto as conseqüentes variações dos deslocamentos d_i. A boa conductibilidade térmica da maior parte dos materiais de construção e o regime geralmente lento de aplicação das fôrças nas construções, são causas que também concorrem para atenuar as variações de temperatura que tendem a produzir-se. As deformações elásticas que teremos ocasião de considerar podem pois ser supostas isotérmicas.

No caso das deformações plásticas já são muito importantes as quantidades de calor postas em jôgo.

Então, com maior rigor, definiremos o deslocamento projectado d_i que figura na expressão da lei de Hook, como sendo a projecção do deslocamento de P_i na direcção Δ_i quando o sólido atingir o repouso e a temperatura ambiente.

4) Fôrças e deslocamentos correspondentes.

Consideremos um corpo satisfazendo à lei de Hook, em repouso sob a acção dum sistema de fôrças $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$.

Como vimos, para qualquer ponto P_i do corpo e para cada direcção Δ_i existe uma expressão da forma:

$$d_i = a_{i1} F_1 + a_{i2} F_2 + \ldots + a_{in} F_n, \tag{6}$$

quer nesse ponto actue ou não uma fôrça.

Consideremos o ponto P_1 no qual actua a fôrça de grandeza F_1. Então a projecção do deslocamento de P_1 numa direcção Δ_1 é dada por uma expressão da forma 6).

Tomemos a direcção Δ_1 coincidente com a de $\vec{F_1}$, isto é, projectemos o deslocamento de P_1 sôbre a direcção da fôrça que actua nesse ponto; se designarmos esta projecção por δ_1, a lei de Hook permite escrever:

$$\delta_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + \ldots + a_{1n} F_n .$$

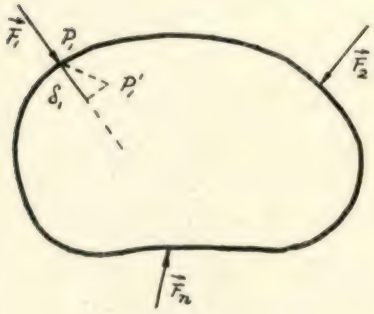


Fig. 6

Semelhantemente para os pontos $P_2, \ldots P_n$, temos as expressões:

$$\delta_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + \ldots + a_{2n} F_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\delta_n = a_{n1} F_1 + a_{n2} F_2 + \ldots + a_{nn} F_n .$$

δ_1 é chamado *deslocamento correspondente a* $\vec{F_1}$; δ_2 *deslocamento correspondente a* $\vec{F_2}$ e assim sucessivamente.

O deslocamento correspondente a uma fôrça pode ser nulo; é o que se dá, por exemplo, nos apoios com articulação ou com escorregamento com atrito desprezível. Suponhamos que em P_i não actua fôrça alguma; então o deslocamento de P_i projectado sôbre uma direcção qualquer, corresponde a uma fôrça nula.

No caso do sólido representado na fig. 2 se as fôrças actuantes forem verticais os deslocamentos correspondentes são as flechas nos pontos de aplicação dessas fôrças.

5) Trabalho das fôrças aplicadas a um corpo.

Suponhamos que as fôrças $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$, mantendo as direcções fixas, são aplicadas ao corpo lentamente, de tal modo que o possamos considerar sempre em repouso e a temperatura constante. Neste caso as expressões de $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ representam os deslocamentos correspondentes a $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$, no instante em que as grandezas das fôrças atingirem os valores $F_1, F_2, \ldots F_n$, isto é, as expressões anteriores subsistem constantemente durante a aplicação das fôrças.

Da expressão de δ_1, vem:

$$\frac{\delta_1}{F_1} = a_{11} + a_{12}\frac{F_2}{F_1} + \ldots + a_{1n}\frac{F_n}{F_1};$$

portanto δ_1 não é em geral proporcional a F_1. Mas suponhamos que durante a aplicação das fôrças as relações $\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_3}{F_1}, \ldots \frac{F_n}{F_1}$ são constantes, isto é, as fôrças são aplicadas simultâneamente mantendo-se permanentemente constantes as relações entre as suas grandezas. Então:

$$\frac{\delta_1}{F_1} = C.^{te}.$$

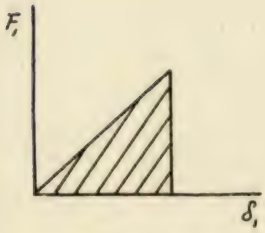


Fig. 7

Quando as fôrças se aplicam do modo indicado δ_1 é proporcional a F_1. O trabalho efectuado por $\vec{F_1}$ é dado pela expressão:

$$W_1 = \int_0^{\delta_1} F_1\, d\,\delta_1 = \int_0^{\delta_1} \frac{\delta_1}{C.^{te}}\, d\,\delta_1 = \frac{1}{C.^{te}}\,\frac{\delta_1^2}{2} = \frac{1}{2} F_1\,\delta_1.$$

O trabalho W_1 é dado pela área tracejada da fig. 7.

Do mesmo modo os trabalhos $W_2, \ldots W_n$ efectuados por $\vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$ têm respectivamente as expressões:

$$W_2 = \frac{1}{2} F_2\,\delta_2$$

.....

$$W_n = \frac{1}{2} F_n\,\delta_n.$$

O trabalho total realizado pelo sistema de fôrças aplicado é dado pela expressão:

$$W = \frac{1}{2}(F_1\,\delta_1 + F_2\,\delta_2 + \ldots + F_n\,\delta_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} F_k\,\delta_k.$$

Esta expressão foi estabelecida na hipótese das fôrças serem aplicadas lentamente ao corpo e de tal modo que se mantenham constantes as relações das suas grandezas.

Mas agora pergunta-se: ¿qual será a expressão do trabalho se as fôrças forem aplicadas de qualquer modo? Por exemplo, primeiramente a fôrça $\vec{F_1}$, depois $\vec{F_2}$ e assim sucessivamente, e suponhamos ainda que são aplicadas bruscamente.

Vamos mostrar que *o trabalho efectuado pelas fôrças aplicadas é independente da maneira como estas atingem os seus valores finais, desde que a deformação seja isotérmica e se atinja o repouso.*

A termodinâmica ensina que numa transformação elementar dum sistema, o trabalho $d\tau$ e a quantidade de calor dQ postas em jôgo, satisfazem à relação:

$$d\tau + dQ = dF,$$

onde F representa a energia interna que depende sómente do estado do sistema; ensina também que numa transformação elementar reversível a expressão $\frac{dQ}{T}$, onde T representa a tem-

peratura termodinâmica, é uma diferencial exacta duma função S do estado do sistema:

$$\frac{dQ}{T} = dS .$$

Se a transformação fôr isotérmica, conclui-se desta expressão que dQ também é uma diferencial exacta duma função do estado do sistema, isto é, a quantidade de calor posta em jôgo numa transformação isotérmica depende sòmente dos estados inicial e final.

É:

$$d\tau = dF - dQ = d\,(F - Q).$$

Portanto numa transformação isotérmica reversível o trabalho depende sòmente dos estados inicial e final do sistema.

Apliquemos êste resultado à deformação elástica dum sólido.

Ora a lei de Hook afirma que, atingido o repouso e restabelecida a temperatura inicial do corpo, os deslocamentos dos diferentes pontos não dependem da maneira como as fôrças são aplicadas, mas sòmente dos seus valores finais $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$, visto na expressão do deslocamento projectado d_i só aparecerem $F_1, F_2, \ldots F_n$ e os coeficientes $a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in}$ que dependem das direcções das fôrças aplicadas. Isto é, a cada sistema de valores $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$ corresponde um estado final. Sendo assim, como as deformações que se consideram se podem supor sempre isotérmicas, concluimos que, atingido o repouso, o trabalho efectuado só depende dos valores finais, $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \ldots \vec{F_n}$, das fôrças aplicadas. Portanto êste trabalho é dado pela expressão:

$$\frac{1}{2}\,(F_1\,\delta_1 + F_2\,\delta_2 + \ldots + F_n\,\delta_n)\ ,$$

que foi o valor determinado para um modo especial de aplicação das fôrças e supondo a deformação isotérmica.

Designamos o trabalho das fôrças aplicadas por *energia de deformação elástica* que representamos por U:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} F_k\,\delta_k .$$

Se retirarmos as fôrças isotèrmicamente êste trabalho é recuperado.

Conclusão: *qualquer que seja o modo como são aplicadas as fôrças, o trabalho destas fôrças, que mede a energia de deformação elástica no estado final, é dado pela expressão anterior desde que a deformação seja isotérmica e se atinja o repouso.*

6) Relações entre os coeficientes de influência

Suponhamos que no sólido actuam sòmente duas fôrças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, àlém de reacções de apoios.

Os deslocamentos correspondentes δ_1 e δ_2 têm as expressões:

$$7)\qquad \begin{cases} \delta_1 = a_{11}\,F_1 + a_{12}\,F_2 \\ \delta_2 = a_{21}\,F_1 + a_{22}\,F_2 . \end{cases}$$

Vamos mostrar que:

$$a_{21} = a_{12} .$$

Apliquemos ao sólido em primeiro lugar a fôrça $\vec{F_1}$; o deslocamento correspondente δ_1 tem a expressão:

$$\delta_1 = a_{11}\,F_1 .$$

O trabalho produzido pela fôrça $\vec{F_1}$ é dado por:

$$\frac{1}{2} F_1 \delta_1 = \frac{1}{2} a_{11} F_1^2 .$$

Apliquemos em seguida a fôrça $\vec{F_2}$ lentamente. O deslocamento δ_1 aumentará de $a_{12} F_2$, e δ_2 de $a_{22} F_2$. O trabalho efectuado por $\vec{F_2}$ é anàlogamente dado pela expressão:

$$\frac{1}{2} a_{22} F_2^2 .$$

Mas visto δ_1 ter aumentado de $a_{12} F_2$, a fôrça $\vec{F_1}$ realizará também, durante a aplicação de $\vec{F_2}$, um certo trabalho; como durante a aplicação de $\vec{F_2}$, a fôrça $\vec{F_1}$ se manteve constante, o trabalho realizado por esta fôrça é:

$$F_1 (a_{12} F_2) = a_{12} F_1 F_2 .$$

Portanto o trabalho total efectuado tem a expressão:

$$W = \frac{1}{2} a_{11} F_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} F_2^2 + a_{12} F_1 F_2 .$$

Suponhamos agora que é aplicada primeiramente a fôrça $\vec{F_2}$ e depois $\vec{F_1}$; então o trabalho W' realizado é dado por:

$$W' = \frac{1}{2} a_{22} F_2^2 + \frac{1}{2} a_{11} F_1^2 + a_{21} F_1 F_2 .$$

Mas como vimos anteriormente, o trabalho não depende da maneira como são aplicadas as fôrças e portanto deve ser:

$$W = W' ,$$

o que implica:

$$a_{12} = a_{21} .$$

Portanto as expressões 7) podem escrever-se:

$$\begin{cases} \delta_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 \\ \delta_2 = a_{12} F_1 + a_{22} F_2 . \end{cases}$$

Êste resultado que acabamos de obter, é conseqüência da lei de Hook e das leis da termodinâmica; pode ser enunciado do seguinte modo: *se δ_1 e δ_2 são os deslocamentos correspondentes às fôrças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ aplicadas em pontos quaisquer P_1 e P_2 do sólido, o efeito sôbre δ_2 duma fôrça unitária aplicada em P_1 e com a direcção e sentido de $\vec{F_1}$ é igual ao efeito sôbre δ_1 duma fôrça unitária aplicada em P_2 e com a direcção e sentido de $\vec{F_2}$.*

Apliquemos êste resultado ao caso duma viga apoiada de qualquer modo nos extremos e submetida a uma carga concentrada $\vec{F_1}$ actuante num ponto P_1.

Consideremos a flecha δ_2 num ponto P_2; é:

$$\delta_2 = a_{21} F_1 .$$

Apliquemos em P_2 uma fôrça com a direcção do deslocamento projectado δ_2, isto é, vertical (mantendo ou não $\vec{F_1}$ aplicada); a flecha em P_1, devida a $\vec{F_2}$, é:

$$\delta_1 = a_{12} F_2 .$$

Como vimos:

$$a_{12} = a_{21} \ ,$$

isto é, *quando aplicamos em P_1 uma fôrça unitária vertical, a flecha em P_2 é igual à flecha em P_1 quando aplicamos em P_2 uma fôrça unitária também vertical.* Êste resultado é conhecido por *teorema de Maxwell.*

Êste teorema permite resolver duma maneira simples o problema da determinação da linha de influência da flecha num ponto duma viga recta. A linha de influência da flecha em P_1, é a linha elástica da viga quando ela está submetida em P_1 a uma carga vertical unitária; é uma conseqüência imediata do teorema de Maxwell. Esta propriedade permite a substituïção dum problema de carga móvel por um problema de carga fixa.

Essa linha de influência pode determinar-se experimentalmente; basta aplicar a fôrça unitária $\vec{F}_1$ a um modêlo cuja linha elástica será a linha de influência da flecha em P_1. Êste procedimento pode generalizar-se para uma estrutura qualquer.

Tal como anteriormente pode demonstrar-se que entre os coeficientes das expressões dos deslocamentos correspondentes, se verificam as relações:

$$a_{13} = a_{31}$$
$$a_{23} = a_{32}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{ik} = a_{ki}$$
$$\dots\dots\dots\dots \ .$$

Portanto nas expressões dos deslocamentos correspondentes há sòmente:

$$n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

coeficientes de influência independentes.

7) Teorema da reciprocidade

Êste teorema é a base do método de Beggs para o estudo das estruturas hiperestáticas, que adiante abordaremos.

Sejam $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ os deslocamentos correspondentes às fôrças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n$ aplicadas nos pontos $P_1, P_2, \dots P_n$ dum sólido qualquer obedecendo à lei de Hook; sejam $\delta'_1, \delta'_2, \dots \delta'_n$ os deslocamentos correspondentes às fôrças $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots \vec{F}'_n$, aplicadas nos mesmos pontos e com as mesmas direcções de $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots \vec{F}_n$ (fig. 8).

Consideremos e expressão:

$$F'_1 \delta_1 + F'_2 \delta_2 + \dots + F'_n \delta_n \ .$$

Pode escrever-se:

$$F'_1 \delta_1 + F'_2 \delta_2 + \dots + F'_n \delta_n = F'_1 (a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + \dots + a_{1n} F_n) + F'_2 (a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + \dots + a_{2n} F_n) +$$
$$+ \dots + F'_n (a_{n1} F_1 + a_{n2} F_2 + \dots + a_{nn} F_n) = (a_{11} F_1 F'_1 + a_{22} F_2 F'_2 + \dots + a_{nn} F_n F'_n) +$$
$$+ a_{12} (F'_1 F_2 + F'_2 F_1) + a_{13} (F'_1 F_3 + F'_3 F_1) + \dots \ .$$

Consideremos agora a expressão:

$$F_1 \delta'_1 + F_2 \delta'_2 + \dots + F_n \delta'_n \ .$$

Visto que as fôrças $\vec{F}'_i$ têm a mesma direcção que as fôrças $\vec{F}_i$, nas expressões:

$$\begin{cases} \delta'_1 = a_{11} F'_1 + a_{12} F'_2 + \dots + a_{1n} F'_n \\ \delta'_2 = a_{21} F'_1 + a_{22} F'_2 + \dots + a_{2n} F'_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta'_n = a_{n1} F'_1 + a_{n2} F'_2 + \dots + a_{nn} F'_n , \end{cases}$$

os coeficientes de influência a_{ik} são os mesmos que figuram nas expressões dos deslocamentos correspondentes $\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n$.

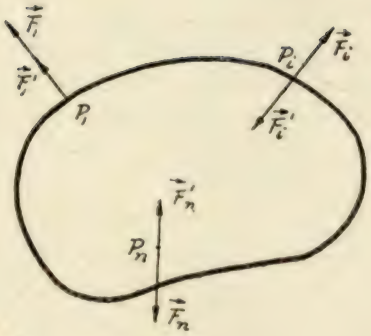


Fig. 8

Portanto:

$$F_1 \delta'_1 + F_2 \delta'_2 + \dots + F_n \delta'_n = F_1 (a_{11} F'_1 + a_{12} F'_2 + \dots + a_{1n} F'_n) + F_2 (a_{21} F'_1 + a_{22} F'_2 + \dots + a_{2n} F'_n) +$$
$$+ \dots + F_n (a_{n1} F'_1 + a_{n2} F'_2 + \dots + a_{nn} F'_n) = (a_{11} F_1 F'_1 + a_{22} F_2 F'_2 + \dots + a_{nn} F_n F'_n) +$$
$$+ a_{12} (F_1 F'_2 + F'_1 F_2) + a_{13} (F_1 F'_3 + F'_1 F_3) + \dots .$$

Logo:

$$F_1 \delta'_1 + F_2 \delta'_2 + \dots + F_n \delta'_n = F'_1 \delta_1 + F'_2 \delta_2 + \dots + F'_n \delta_n .$$

Podemos portanto afirmar que: *as fôrças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ actuando através dos deslocamentos correspondentes produzidos pelas fôrças $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$, efectuam o mesmo trabalho que as fôrças do segundo sistema actuando através dos deslocamentos correspondentes produzidos pelo primeiro.*

É êste o teorema da reciprocidade que foi estabelecido por Maxwell, Betti e Rayleigh.

Aplicação.

Consideremos um arco articulado nas nascenças e submetido à acção duma fôrça vertical $\vec{F}$ actuante num ponto P. Seja δ a flecha em P produzida por $\vec{F}$, e $\vec{H}$ a componente horizontal (impulsão) das reacções dos apoios.

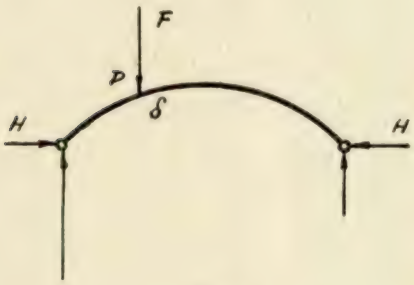


Fig. 9

Pergunta-se: qual o valor de H, sabendo que se um dos apoios sofre um deslocamento horizontal (assentamento) δ', a flecha em P passa de δ para δ''?

Recorramos ao teorema da reciprocidade.

Primeiro sistema de fôrças actuantes $\rightarrow \vec{F}, \vec{H}$

Deslocamentos correspondentes $\rightarrow \delta, 0$

Segundo sistema de fôrças actuantes $\rightarrow \vec{F}, \vec{H}'$

Deslocamentos correspondentes $\rightarrow \delta'', -\delta'$,

o valor da impulsão após o assentamento, $\vec{H}'$, é desconhecido.

Vem:

$$F . \delta'' - H . \delta' = F . \delta + H' . 0 ,$$

donde:

$$H = \frac{F (\delta'' - \delta)}{\delta'} .$$

8) Conseqüência da lei de Hook. Generalização do teorema da reciprocidade.

Consideremos um sólido, obedecendo à lei de Hook, submetido a um sistema de fôrças

$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$. Suponhamos que duas das fôrças, por exemplo $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, constituem um binário e suponhamos ainda que estas duas fôrças são perpendiculares ao segmento $P_1 P_2$ que une os seus pontos de aplicação (fig. 10).

Visto serem muito pequenas as deformações satisfazendo à lei de Hook, podemos supor as fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ constantemente perpendiculares a $P_1 P_2$ durante a deformação. Devido à aplicação do binário e da fôrça $\vec{F}_3$, os pontos P_1 e P_2 sofrem deslocamentos $P'_1 - P_1$ e $P'_2 - P_2$; sejam δ_1 e δ_2 os deslocamentos correspondentes a $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

Quando os pontos P_1 e P_2 se deslocam o segmento $P_1 P_2$ sofre, além duma variação de comprimento, uma rotação. Consideremos a projecção do segmento $P'_1 P'_2$ no plano que passa pelos pontos P_1 e P_2 e é paralelo às fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. O ângulo θ formado por esta projecção com o segmento $P_1 P_2$ chama-se *deslocamento angular correspondente* ao binário constituido pelas fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. No caso bastante corrente dos deslocamentos $P'_1 - P_1$ e $P'_2 - P_2$ existirem no plano das fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, o deslocamento θ correspondente ao binário é o ângulo formado pelos segmentos $P_1 P_2$ e $P'_1 P'_2$.

Seja θ' o ângulo formado pelo segmento $P_1 P_2$ com o que une os extremos dos deslocamentos correspondentes δ_1 e δ_2 (fig. 11). Visto os deslocamentos serem muito pequenos, podemos supor:

$$\theta = \theta' \ .$$

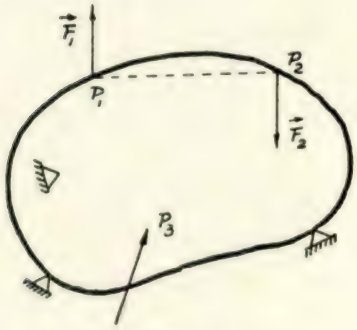


Fig. 10

Portanto:

$$\theta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{L} \ ,$$

onde:

$$L = \overline{P_1 P_2} \ .$$

Os deslocamentos correspondentes às fôrças actuantes $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_3$ são dados pelas expressões:

$$\begin{cases} \delta_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + a_{13} F_3 \\ \delta_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + a_{23} F_3 \\ \delta_3 = a_{31} F_1 + a_{32} F_2 + a_{33} F_3 \ . \end{cases}$$

Designemos por F a grandeza comum das fôrças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$. Vem:

$$\begin{cases} \delta_1 = (a_{11} + a_{12}) F + a_{13} F_3 \\ \delta_2 = (a_{21} + a_{22}) F + a_{23} F_3 \\ \delta_3 = (a_{31} + a_{32}) F + a_{33} F_3 \ . \end{cases}$$

Portanto:

$$\theta = \frac{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}{L} F + \frac{a_{13} + a_{23}}{L} F_3 \ .$$

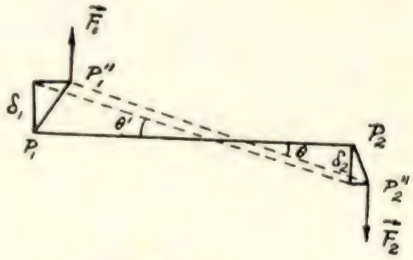


Fig. 11

Se designarmos por M a grandeza do momento do binário, é:

$$M = F L \ .$$

Logo:

$$8) \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}{L^2} M + \dfrac{a_{13} + a_{23}}{L} F_3 \\ \delta_3 = \dfrac{a_{31} + a_{32}}{L} M + a_{33} F_3 \ . \end{cases}$$

Fazendo:

$$\frac{a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}}{L^2} = a, \qquad \frac{a_{13} + a_{23}}{L} = b,$$

$$\frac{a_{31} + a_{32}}{L} = c \qquad e \qquad a_{33} = d,$$

vem:

9) $$\begin{cases} \theta = aM + bF_3 \\ \delta_3 = cM + dF_3. \end{cases}$$

Isto é, as expressões de θ e δ_3, deslocamentos correspondentes ao binário de momento $\vec{M}$ e à fôrça $\vec{F_3}$, são funções lineares e homogéneas de M e F_3. As igualdades 9) exprimem portanto uma generalização da lei de Hook.

a é a rotação do segmento $P_1 P_2$ produzida por um binário de momento unitário constituído por fôrças com a direcção, sentidos e pontos de aplicação de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$.

b é a rotação do segmento $P_1 P_2$ produzida por uma fôrça unitária com a direcção, sentido e ponto de aplicação de $\vec{F_3}$.

c é o deslocamento correspondente a $\vec{F_3}$ provocado pelo binário de momento unitário.

d tem o significado de a_{33}.

Vimos que:

$$a_{13} = a_{31} \text{ e } a_{23} = a_{32} \quad ,$$

portanto:

$$b = c \quad .$$

Esta igualdade traduz uma generalização da propriedade de simetria dos coeficientes das expressões dos deslocamentos correspondentes. Podemos portanto afirmar que: *a rotação correspondente ao binário de momento $\vec{M}$, produzida por uma fôrça unitária com a direcção, sentido e ponto de aplicação de $\vec{F_3}$, é igual ao deslocamento correspondente a $\vec{F_3}$ produzido por um binário com momento unitário constituído por fôrças com a direcção, sentidos e pontos de aplicação de $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$.*

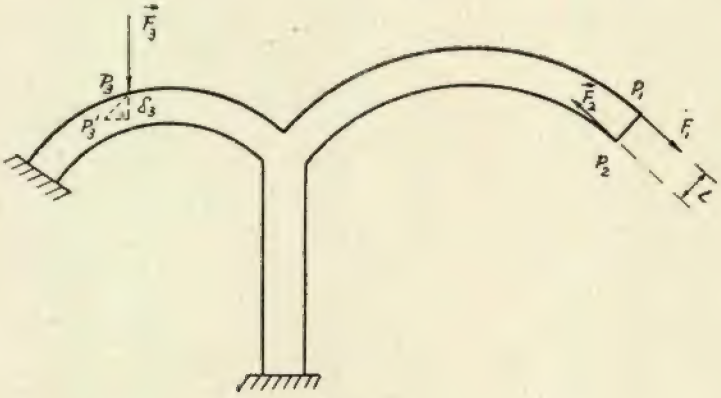


Fig. 12

Apliquemos esta conclusão ao sólido da fig. 12 constituído por dois arcos assentes sôbre um pilar. Quando aplicamos um binário com momento de grandeza $M = FL = 1$, o deslocamento correspondente a $\vec{F_3}$ que se observa, é igual à rotação, medida em radianos, do segmento $P_1 P_2$ produzida por uma fôrça vertical unitária aplicada em P_3.

As expressões 9) podem generalizar-se fàcilmente pára um número qualquer de binários e fôrças actuantes. Isto é, nas expressões:

$$\begin{cases} \delta_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + \ldots + a_{1k} F_k \ldots \\ \delta_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + \ldots + a_{2k} F_k \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_k = a_{k1} F_1 + a_{k2} F_2 + \ldots + a_{kk} F_k \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{cases}$$

$\vec{F}_i$ e δ_i, $\vec{F}_k$ e δ_k ... tanto podem representar fôrças e deslocamentos correspondentes, como momentos de binários e deslocamentos angulares correspondentes. Subsiste a simetria dos coeficientes: $a_{ik} = a_{ki}$.

O teorema da reciprocidade que, como vimos, é uma conseqüência da forma linear e homogénea das expressões dos deslocamentos correspondentes e da simetria dos coeficientes, subsistirá no caso de alguns ou todos os $\vec{F}_i$ e δ_i designarem momentos de binários e rotações correspondentes.

Assim, suponhamos um corpo submetido a uma fôrça $\vec{F}$ e a um binário de momento $\vec{M}$; sejam δ e θ os deslocamentos correspondentes. Apliquemos ao mesmo corpo uma fôrça $\vec{F}'$ com a direcção e ponto de aplicação de $\vec{F}$, e um binário de momento $\vec{M}'$ constituído por fôrças com a mesma direcção e pontos de aplicação das fôrças que constituíam o binário de momento $\vec{M}$; sejam δ' e θ' os deslocamentos correspondentes. Verifica-se a relação:

$$F\delta' + M\theta' = F'\delta + M'\theta,$$

que utilizaremos adiante.

9) Expressão da energia de deformação elástica em função das grandezas das fôrças aplicadas.

Como vimos, suposta a deformação isotérmica, a energia de deformação elástica é dada por:

$$U = \frac{1}{2} (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + \ldots + F_n \delta_n).$$

Esta expressão subsiste mesmo no caso de $\vec{F}_i$ e δ_i designarem o momento dum binário e o deslocamento angular correspondente, pois que a expressão do trabalho elementar de $\vec{F}_i$ continuará a ser $F_i d\delta_i$.

Substituamos na expressão de U os deslocamentos correspondentes pelos seus valores; vem:

$$U = \frac{1}{2} F_1 (a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + \ldots + a_{1n} F_n) + \frac{1}{2} F_2 (a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + \ldots + a_{2n} F_n) +$$

$$\ldots + \frac{1}{2} F_n (a_{n1} F_1 + a_{n2} F_2 + \ldots + a_{nn} F_n),$$

donde:

$$U = \frac{1}{2} (a_{11} F_1^2 + a_{22} F_2^2 + \ldots + a_{nn} F_n^2) + (a_{12} F_1 F_2 + a_{13} F_1 F_3 + \ldots + a_{1n} F_1 F_n +$$

$$+ a_{23} F_2 F_3 + \ldots + a_{2n} F_2 F_n + \ldots).$$

Portanto a expressão da energia de deformação elástica, em função das grandezas das fôrças aplicadas, é:

10) $$U = \frac{1}{2} \sum_i a_{ii} F_i^2 + \sum_{k<j} a_{kj} F_k F_j ,$$

onde F_i, F_k e F_j tanto podem representar grandezas de fôrças como de momentos de binários.

Há n termos no primeiro somatório e $\frac{n(n-1)}{2}$ no segundo.

10) Primeiro teorema de Castigliano

Sejam $F_1, F_2, \ldots F_n$ as grandezas das fôrças actuantes, segundo direcções determinadas, num sólido impossibilitado de movimento de conjunto. Suponhamos que F_1 sofre uma variação elementar dF_1, mantendo-se constantes as outras fôrças $\vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$. Em geral todos os deslocamentos sofrerão uma variação.

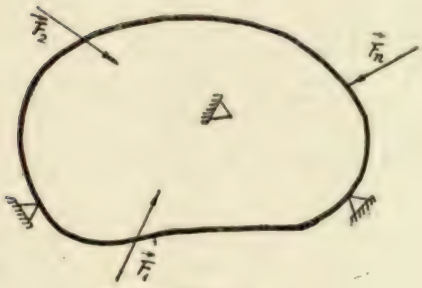


Fig. 13

Vejamos como varia a energia de deformação elástica U.

Da expressão 10) resulta:

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + \ldots + a_{1n} F_n .$$

Mas o segundo membro desta expressão é o deslocamento δ_1 correspondente a $\vec{F}_1$. Portanto:

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \delta_1$$

Do mesmo modo poderíamos mostrar que:

$$\frac{\partial U}{\partial F_2} = \delta_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_n} = \delta_n .$$

Estas igualdades exprimem o *primeiro teorema de Castigliano* que pode ser enunciado do seguinte modo: *o deslocamento δ_i correspondente a uma fôrça $\vec{F}_i$ é igual à derivada parcial em relação a F_i, da energia de deformação elástica expressa nas grandezas das fôrças actuantes.*

Êste enunciado subsiste quando F_i e δ_i designam a grandeza do momento dum binário e o deslocamento angular correspondente.

Façamos uma observação.

Visto ser:

$$U = \frac{1}{2} (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + \ldots + F_n \delta_n) ,$$

poderá julgar-se que:

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{1}{2} \delta_1 .$$

Mas esta derivação não está feita correctamente, pois que δ_1, $\delta_2, \ldots \delta_n$ são funções de F_1. É:

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{1}{2} \left[\delta_1 + F_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial F_1} + F_2 \frac{\partial \delta_2}{\partial F_1} + \ldots + F_n \frac{\partial \delta_n}{\partial F_1} \right] ,$$

e das expressões de δ_1, δ_2, ... δ_n concluímos que:

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial F_1} = a_{11}$$

$$\frac{\partial \delta_2}{\partial F_2} = a_{22}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Portanto:

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{1}{2}\left[\delta_1 + a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + \dots + a_{1n} F_n\right],$$

donde:

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \delta_1 .$$

O primeiro teorema de Castigliano presta-se à determinação dos deslocamentos sofridos pelos pontos dos sólidos para os quais se conhece a expressão de U em função das grandezas das fôrças actuantes. Em geral, dado um sólido qualquer, não se conhece esta expressão, que contudo se sabe determinar para alguns casos particulares muito importantes na técnica.

11) Aplicações do primeiro teorema de Castigliano

Vamos em primeiro lugar aplicá-lo à determinação dos deslocamentos dos nós de sistemas triangulados isostáticos.

Para resolvermos estes problemas temos necessidade de conhecer a expressão da energia de deformação elástica, U, duma peça prismática submetida a uma tracção ou compressão. É:

$$U = \frac{1}{2} F \delta ,$$

onde F e δ representam a grandeza da fôrça aplicada e a deformação que a peça sofre. Vimos que:

$$\delta = \frac{F L}{E S} ,$$

portanto:

11) $$U = \frac{F^2 L}{2 E S} .$$

Notemos que esta expressão é aproximada pois que o valor dado a δ só é legítimo quando se refere a uma porção da peça prismática suficientemente afastada dos pontos de aplicação das fôrças. No entanto a aproximação da expressão que obtivemos para U é em geral suficiente para a resolução dos problemas correntes.

a) Consideremos o sistema triangulado, plano, articulado, representado na figura 14, fixado por meio de articulações em A e B, e submetido à fôrça $\vec{F_1}$.

Vamos calcular a flecha no ponto de aplicação, P_1, desta fôrça.

Estamos em presença dum sólido impossibilitado de movimento de conjunto. É-lhe aplicável a lei de Hook e as suas conseqüências, uma das quais é o teorema de Castigliano. Se determinarmos a expressão da energia de deformação elástica U, em função de F_1, a flecha procurada é dada pela expressão: $\delta_1 = \frac{\partial U}{\partial F_1}$.

A estática permite determinar as tensões nas barras do sistema.

Na corda superior as tensões são, da esquerda para a direita:

$$6\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad 4\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad 2\frac{F_1}{\sqrt{3}};$$

nas barras inclinadas são, da esquerda para a direita:

$$-2\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad 2\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad -2\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad 2\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad -2\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad 2\frac{F_1}{\sqrt{3}};$$

na corda inferior são da esquerda para a direita:

$$-5\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad -3\frac{F_1}{\sqrt{3}}, \quad -\frac{F_1}{\sqrt{3}}.$$

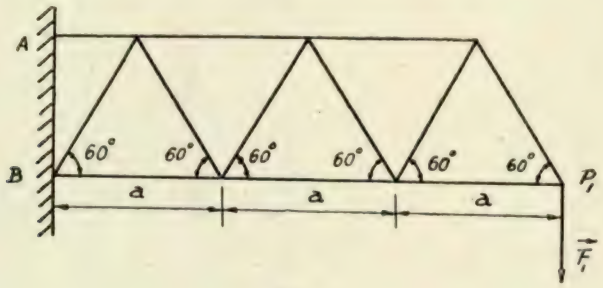


Fig. 14

Conhecidas as tensões nas barras do sistema, a expressão 11) permite calcular a energia de deformação elástica em cada barra e portanto a energia de deformação elástica total.

A energia de deformação elástica das barras da corda superior, é:

$$\frac{3aF_1^2}{ES}, \quad \frac{8aF_1^2}{3ES} \quad \text{e} \quad \frac{2aF_1^2}{3ES}.$$

A energia de deformação elástica das barras inclinadas é, para cada uma:

$$\frac{2aF_1^2}{3ES}.$$

Para as barras da corda inferior:

$$\frac{25}{6}\frac{aF_1^2}{ES}, \quad \frac{3}{2}\frac{aF_1^2}{ES} \quad \text{e} \quad \frac{aF_1^2}{6ES}.$$

A energia total é igual à soma das energias calculadas:

$$U = \frac{97}{6}\frac{aF_1^2}{ES}.$$

Portanto a flecha em P_1 é:

$$\delta_1 = \frac{97}{3}\frac{aF_1}{ES}.$$

Suponhamos agora que desejamos conhecer a projecção δ', do deslocamento do nó P_1, sôbre uma direcção Δ' que não é a da fôrça actuante nesse nó.

Se o deslocamento de P_1 se desse segundo a vertical, então seria:

$$\delta' = \delta_1 \cos \theta,$$

sendo θ o ângulo formado pela direcção Δ' com a da vertical. Mas devido à aplicação de $\vec{F}_1$, P_1 desloca-se para uma posição qualquer P_1' e portanto não podemos conhecer δ' em função de δ_1 e θ. Vejamos então como se determina δ'. Para isso façamos em primeiro lugar uma observação.

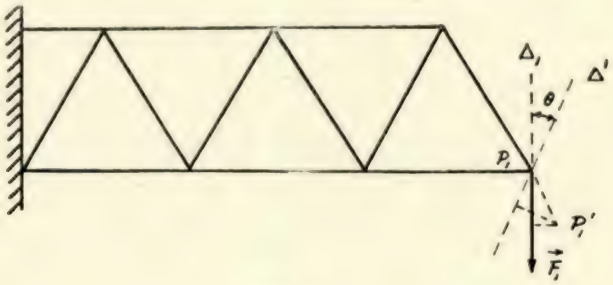


Fig. 15

Vimos que para um corpo actuado por um sistema de fôrças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$, a lei de Hook afirma que:

$$\begin{cases} d_1 = a_{11} F_1 + a_{12} F_2 + \ldots + a_{1n} F_n \\ d_2 = a_{21} F_1 + a_{22} F_2 + \ldots + a_{2n} F_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n = a_{n1} F_1 + a_{n2} F_2 + \ldots + a_{nn} F_n. \end{cases}$$

Ora estas expressões subsistem mesmo no caso de dois dos pontos, por exemplo P_1 e P_2, coincidirem (fig. 16); então d_1 e d_2 são as projecções do deslocamento dum mesmo ponto sôbre duas direcções Δ_1 e Δ_2. Se projectarmos o deslocamento dêste ponto nas direcções de $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ obtemos os deslocamentos correspondentes a $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$; portanto, para um ponto onde actuam duas fôrças, há dois deslocamentos correspondentes. Para estas fôrças e deslocamentos verificar-se-ão tôdas as propriedades que estabelecemos, em especial o primeiro teorema de Castigliano.

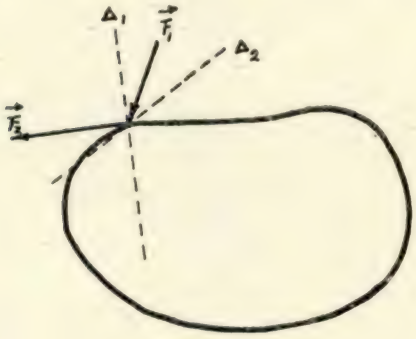


Fig. 16

Feita esta observação voltemos ao problema da determinação da projecção δ' do deslocamento de P_1 na direcção Δ'.

Suponhamos aplicada em P_1 outra fôrça, $\vec{F'}$, com a direcção de Δ'. Então, tal como anteriormente, podemos determinar a tensão, numa barra qualquer, provocada por $\vec{F'}$.

Cada barra ficará submetida a uma tensão T_i, dada pela expressão:

$$T_i = C_{i1} F_1 + C'_i F',$$

onde C_{i1} e C_i' são constantes, positivas ou negativas. A expressão da energia de deformação elástica é:

$$U = \sum_{i=1}^{m} \frac{L_i (C_{i1} F_1 + C'_i F')^2}{2 E_i S_i},$$

onde m designa o número de barras do sistema.

Para determinarmos δ' basta calcular a derivada $\frac{\partial U}{\partial F'}$ no ponto $F' = 0$, visto querermos

conhecer δ' quando actua sómente $\vec{F}_1$:

$$\delta' = \left(\frac{\partial U}{\partial F'}\right)_{F'=0}, \text{ donde: } \quad \delta' = \sum_{i=1}^{m} \frac{L_i C_{i1} F_1 C'_i}{E_i S_i}.$$

Não se deve estranhar que tivéssemos calculado a expressão de U em função de F' para depois fazermos $F' = 0$; basta notar que fizemos $F' = 0$, na derivada da função U e não na própria função.

Suponhamos agora que desejamos determinar a projecção sôbre uma direcção Δ, do deslocamento dum nó no qual não actua fôrça alguma. Basta considerar, além das fôrças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ uma fôrça $\vec{F}$ com a direcção de Δ, determinar a expressão da energia U, e calcular a derivada:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial F}\right)_{F=0},$$

onde U representa a energia devida a tôdas as fôrças actuantes.

b) Dum modo geral, dado um sistema triangulado, articulado, plano ou no espaço, submetido a fôrças $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ actuantes nos nós, a tensão T_i numa barra qualquer, é, em virtude da lei de Hook, da forma:

$$T_i = C_{i1} F_1 + C_{i2} F_2 + \ldots + C_{ik} F_k + \ldots + C_{in} F_n,$$

onde C_{ik} representa o coeficiente de influência da fôrça $\vec{F}_k$ na tensão da barra de ordem i; C_{ik} é a tensão nesta barra devida a uma fôrça com o ponto de aplicação, direcção e sentido de $\vec{F}_k$, e de grandeza unitária, $F_k = 1$.

Os valores dos coeficientes C_{ik} tanto podem ser determinados analiticamente, tal como no exemplo da alínea *a*), como por qualquer dos processos gráficos correntemente adoptados.

A expressão da energia de deformação elástica do sistema é:

$$U = \sum_{i=1}^{m} \frac{L_i T_i^2}{2 E_i S_i},$$

sendo *m* o número de barras do sistema.

O deslocamento correspondente a uma fôrça $\vec{F}_k$ é dado por:

$$\delta_k = \frac{\partial U}{\partial F_k}, \text{ donde: } \quad \delta_k = \sum_{i=1}^{m} \frac{L_i T_i C_{ik}}{E_i S_i},$$

visto que:

$$\frac{\partial T_i}{\partial F_k} = C_{ik}.$$

A expressão de δ_k pode ainda escrever-se:

12) $$\delta_k = \sum_{i=1}^{m} \frac{L_i C_{ik}}{E_i S_i} (C_{i1} F_1 + C_{i2} F_2 + \ldots + C_{in} F_n).$$

No caso de se pretender determinar a projecção δ' do deslocamento, sôbre uma direcção Δ' segundo a qual não actua uma fôrça, basta juntar ao sistema das fôrças actuantes $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$, uma fôrça $\vec{F}'$ dirigida segundo Δ'; a tensão numa barra é dada por:

$$T_i = C_{i1} F_1 + C_{i2} F_2 + \ldots + C_{in} F_n + C'_i F'.$$

Visto:

$$\delta' = \left(\frac{\partial U}{\partial F'}\right)_{F'=0},$$

vem:

$$\delta' = \sum_{i=1}^{m} \frac{L_i C'_i}{E_i S_i} (C_{i1} F_1 + C_{i2} F_2 + \ldots + C_{in} F_n) .$$

Apliquemos êstes resultados para resolver o seguinte problema: calcular os deslocamentos que sofrem os pontos P_3 e A_6 do sistema triangulado articulado representado na fig. 17, quando o submetemos à acção do sistema de fôrças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ e $\vec{F}_5$, de grandezas iguais a 30.000 kg. O sistema é homogéneo, $E_i = E$, de aço, $E = 2 \times 10^6$ kg/cm².

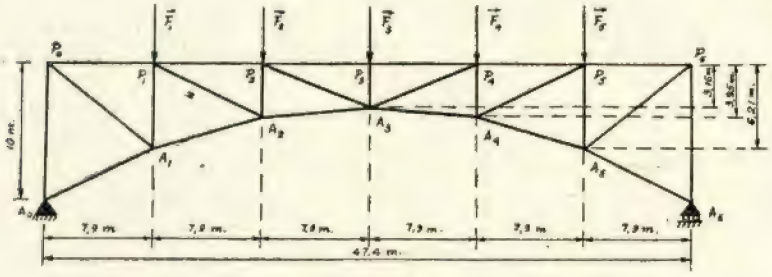


Fig. 17

Vamos em primeiro lugar calcular o deslocamento, δ_3, do ponto P_3. É dado por:

$$\delta_3 = \frac{1}{E} \sum_i \frac{L_i T_i C_{i3}}{S_i} .$$

Para o cálculo desta expressão convém organizar o seguinte quadro (¹):

Barras	Comprimentos L_i (cm)	Secções S_i (cm²)	Tensões T_i (kg)	Coeficientes C_{i3}	Expressões $\frac{L_i T_i C_{i3}}{S_i}$
P_0 P_1	790	322,5	+ 95.500	+ 0,6375	+ 149.000
P_1 P_2	790	322,5	+ 240.000	+ 2	+ 1.176.000
P_2 P_3	790	322,5	+ 337.500	+ 3,75	+ 3.100.000
A_0 P_0	1000	322,5	+ 75.000	+ 0,5	+ 116.200
A_1 P_1	618	258	+ 102.000	+ 0,682	+ 166.400
A_2 P_2	395	193,5	+ 68.200	+ 0,7	+ 97.400
A_3 P_3	316	64,5*	+ 15.000*	+ 0,5 *	+ 36.800*
P_0 A_1	1000	322,5	— 121.600	— 0,81	+ 305.600
P_1 A_2	881	258	— 161.600	— 1,525	+ 842.000
P_2 A_3	851	193,5	— 109.800	— 1,88	+ 908.000
A_0 A_1	877	645	0	0	0
A_1 A_2	820	580	— 99.500	— 0,661	+ 93.000
A_2 A_3	794	515	— 241.300	— 0,2015	+ 74.800
					+ 7.065.200

Em virtude do sistema triangulado ser simétrico e estar simètricamente carregado, só

(¹) Os valores de T_i e C_{i3} foram obtidos gràficamente.

considerámos as barras de metade do sistema, e como os valores marcados com asterisco (relativos à barra média $A_3 P_3$) são iguais a metade dos valores reais, vem:

$$\sum_i \frac{L_i T_i C_{i3}}{S_i} = 2 \times 7{,}07 \times 10^6 .$$

Portanto:

$$\delta_3 = \frac{2 \times 7{,}07 \times 10^6}{2 \times 10^6} ,$$

$$\delta_3 = 7{,}07 \text{ cm} .$$

Para o cálculo do deslocamento, δ_6, do ponto A_6 procede-se do mesmo modo. E:

$$\delta_6 = \frac{1}{E} \sum_i \frac{L_i T_i C_{i6}}{S_i} .$$

Barras	Comprimentos L_i (cm)	Secções S_i (cm²)	Tensões T_i (kg)	Coeficientes C_{i6}	Expressões $\frac{L_i T_i C_{i6}}{S_i}$
P_0 P_1	790	322,5	+ 95.500	+ 0,617	+ 144.400
P_1 P_2	790	322,5	+ 240.000	+ 1,533	+ 902.000
P_2 P_3	790	322,5	+ 337.500	+ 2,165	+ 1.788.000
A_0 P_0	1000	322,5	+ 75.000	+ 0,483	+ 112.400
A_1 P_1	618	258	+ 102.000	+ 0,458	+ 112.000
A_2 P_2	395	193,5	+ 68.200	+ 0,253	+ 35.200
A_3 P_3	316	64,5*	+ 15.000*	0	0
P_0 A_1	1000	322,5	— 121.600	— 0,785	+ 296.000
P_1 A_2	881	258	— 161.600	— 1,025	+ 565.200
P_2 A_3	851	193,5	— 109.800	— 0,68	+ 328.400
A_0 A_1	877	645	0	— 1,11	0
A_1 A_2	820	580	— 99.500	— 1,678	+ 234.200
A_2 A_3	794	515	— 241.300	— 1,55	+ 948.000
					+ 5.465.800

Portanto:

$$\sum_i \frac{L_i T_i C_{i6}}{S_i} = 2 \times 5{,}47 \times 10^6 ,$$

e:

$$\delta_6 = \frac{2 \times 5{,}47 \times 10^6}{2 \times 10^6} ,$$

$$\delta_6 = 5{,}47 \text{ cm} .$$

É êste o valor do deslocamento sofrido pelo apoio móvel.

c) Vamos agora aplicar o primeiro teorema de Castigliano a um sistema triangulado a três dimensões.

Abordemos em primeiro lugar algumas generalidades.

Consideremos um sistema triangulado a três dimensões, articulado, por exemplo o representado na fig. 18.

A tensão numa barra terá a direcção da recta que une os nós ligados pela barra, visto o sistema articulado ser suposto em repouso.

Seja em geral, $\vec{F}_i$ (X_i, Y_i, Z_i) a resultante das fôrças exteriores actuantes no nó P_i (x_i, y_i, z_i) e designemos por T_{ij} (X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}) a tensão na barra que une os nós P_i e P_j.

Cada nó há-de estar em equilíbrio sob a acção das fôrças exteriores, que supomos aplicadas sòmente nos nós, e das fôrças exercidas pelas barras do sistema que concorrem nesse nó. Portanto para cada nó P_i temos a equação vectorial:

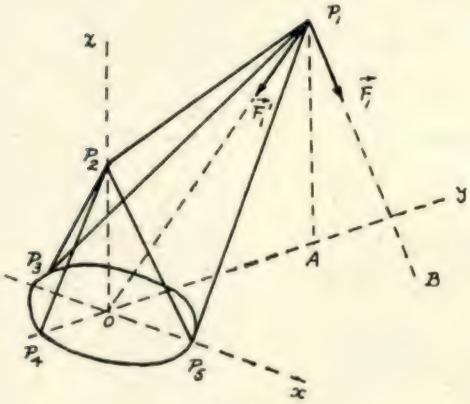


Fig. 18

$$\vec{F}_i + \vec{T}_{ij} + \vec{T}_{ik} + \ldots = 0 ,$$

a que correspondem as três equações cartezianas:

$$13) \quad \begin{cases} X_i + X_{ij} + X_{ik} + \ldots = 0 \\ Y_i + Y_{ij} + Y_{ik} + \ldots = 0 \\ Z_i + Z_{ij} + Z_{ik} + \ldots = 0 . \end{cases}$$

O número total das equações fornecidas pelas condições de equilíbrio dos *n* nós do sistema é $3n$.

Mas notemos que as fôrças exteriores hão-de constituir um sistema em equilíbrio, isto é, equivalente a zero, visto a estrutura estar em repoùso; portanto entre as fôrças exteriores haverá as duas relações vectoriais:

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \sum_i F_i \wedge (O - P_i) = 0 , \end{cases}$$

onde O representa o ponto em relação ao qual se tomam os momentos; a estas equações correspondem $2 \times 3 = 6$ equações cartezianas. Portanto das $3n$ equações só $3n - 6$ são independentes.

Designemos por *b* o número de barras do sistema triangulado. Se fôr $b = 3n - 6$, o número de incógnitas (tensões nas barras) iguala o número de equações independentes e o sistema triangulado é em geral isostático.

Se fôr $b > 3n - 6$, o sistema é hiperestático; não bastam as condições de equilíbrio para determinar as tensões, havendo necessidade de considerar as deformações do sistema, como veremos.

Finalmente se fôr $b < 3n - 6$, o sistema tem peças que se podem deslocar sem que o sistema se deforme elàsticamente.

O número:

$$N = b - (3n - 6) = b - 3n + 6 ,$$

chama-se *grau de indeterminação do sistema hiperestático.* N é o número de equações de deformação que é necessário juntar às de equilíbrio, para ser possível a determinação das tensões nas barras do sistema.

Anàlogamente, para que um sistema triangulado plano seja isostático é necessário que $b = 2n - 3$, visto termos para cada nó duas condições de equilíbrio e serem três as equações fornecidas pelas condições de equilíbrio das fôrças exteriores.

Se $b > 2n - 3$, o sistema é hiperestático, sendo $N = b - 2n + 3$ o grau de indeterminação.

Nos sistemas triangulados a três dimensões a determinação das tensões nas barras faz-se sempre por métodos analíticos.

Nas equações de equilíbrio 13) convém efectuar algumas transformações.

É:

$$X_{ij} = \frac{x_i - x_j}{L_{ij}} T_{ij}, \quad Y_{ij} = \frac{y_i - y_j}{L_{ij}} T_{ij} \quad \text{e} \quad Z_{ij} = \frac{z_i - z_j}{L_{ij}} T_{ij},$$

onde T_{ij} é positivo quando a barra está submetida a uma compressão, e:

$$L_{ij} = \overline{P_i P_j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.$$

Portanto as equações 13) tomam a forma:

$$\begin{cases} X_i + \dfrac{x_i - x_j}{L_{ij}} T_{ij} + \dfrac{x_i - x_k}{L_{ik}} T_{ik} + \ldots = 0 \\[2ex] Y_i + \dfrac{y_i - y_j}{L_{ij}} T_{ij} + \dfrac{y_i - y_k}{L_{ik}} T_{ik} + \ldots = 0 \\[2ex] Z_i + \dfrac{z_i - z_j}{L_{ij}} T_{ij} + \dfrac{z_i - z_k}{L_{ik}} T_{ik} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Conhecidas tôdas as fôrças exteriores incluindo as reacções dos apoios, as incógnitas são sòmente as tensões T_{ij}, T_{ik},... .

Expostas estas generalidades àcêrca dos sistemas triangulados a três dimensões, vamos resolver o seguinte problema: determinar o deslocamento, δ_1, na direcção de $\vec{F_1}$, do ponto P_1 do guindaste representado na fig. 18. Os pontos P_3, P_4 e P_5 existem sôbre uma circunferência e o plano dos yz é um plano de simetria do sistema. O cabo por intermédio do qual o guindaste exerce a fôrça $\vec{F_1}$ passa por uma roldana de dimensões desprezíveis, situada em P_1, e pelo centro O da base do guindaste; a direcção do cabo encontra o plano xoy no ponto B de coordenadas: $x_B = 10$ m e $y_B = 7{,}5$ m.

Supomos que:

$$\overline{P_3 P_5} = 5 \text{ m},$$
$$\overline{O P_2} = 5 \text{ m},$$
$$\overline{O A} = \overline{A P_1} = 10 \text{ m},$$
$$F_1 = 1000 \text{ kg},$$
$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2,$$

e que tôdas as barras têm a secção, S, igual a 5 cm².

De 12) conclui-se que o deslocamento δ_1 é dado pela expressão:

$$\delta_1 = \frac{1}{E S} \Sigma L_{ij} T_{ij} C_{ij1}.$$

Temos portanto de calcular os comprimentos e as tensões das barras, e os coeficientes C_{ij1}.

Para calcularmos as tensões nas barras estabelecemos as condições de equilíbrio dos nós P_1 e P_2 nos quais concorrem tôdas as barras do sistema.

No nó P_1 actuam duas fôrças exteriores, exercidas pelos dois ramos do cabo que passa pela roldana, $\vec{F_1}$ (X_1, Y_1, Z_1) e $\vec{F'_1}$ (X'_1, Y'_1, Z'_1), de grandezas iguais a F_1, e com as direcções de P_1B e P_1O. As condições de equilíbrio de P_1 fornecem as equações:

$$14)\quad \begin{cases} X_1 + X'_1 + \dfrac{x_1 - x_2}{L_{12}} T_{12} + \dfrac{x_1 - x_3}{L_{13}} T_{13} + \dfrac{x_1 - x_5}{L_{15}} T_{15} = 0 \\[2ex] Y_1 + Y'_1 + \dfrac{y_1 - y_2}{L_{12}} T_{12} + \dfrac{y_1 - y_3}{L_{13}} T_{13} + \dfrac{y_1 - y_5}{L_{15}} T_{15} = 0 \\[2ex] Z_1 + Z'_1 + \dfrac{z_1 - z_2}{L_{12}} T_{12} + \dfrac{z_1 - z_3}{L_{13}} T_{13} + \dfrac{z_1 - z_5}{L_{15}} T_{15} = 0 \,. \end{cases}$$

As coordenadas dos nós do sistema e os comprimentos das barras, expressos em metros, são:

$$\begin{array}{ll} P_1\ (0;\ 10;\ 10) & L_{12} = 11{,}2 \\ P_2\ (0;\ 0;\ 5) & L_{13} = L_{15} = 14{,}35 \\ P_3\ (-2{,}5;\ 0;\ 0) & L_{23} = L_{24} = L_{25} = 5{,}6\ . \\ P_4\ (0;\ -2{,}5;\ 0) & \\ P_5\ (2{,}5;\ 0;\ 0) & \end{array}$$

As componentes das fôrças exteriores $\vec{F_1}$ e $\vec{F'_1}$ são:

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{x_B - x_1}{L_{1B}} F_1 = \dfrac{10}{14{,}35} F_1 \\[2ex] Y_1 = \dfrac{y_B - y_1}{L_{1B}} F_1 = \dfrac{-2{,}5}{14{,}35} F_1 \\[2ex] Z_1 = \dfrac{z_B - z_1}{L_{1B}} F_1 = \dfrac{-10}{14{,}35} F_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X'_1 = \dfrac{-x_1}{L_{OP_1}} F'_1 = 0 \\[2ex] Y'_1 = \dfrac{-y_1}{L_{OP_1}} F'_1 = \dfrac{-1000}{1{,}415} \\[2ex] Z'_1 = \dfrac{-z_1}{L_{OP_1}} F'_1 = \dfrac{-1000}{1{,}415}\ . \end{cases}$$

Nas expressões de X_1, Y_1 e Z_1 não substituímos F_1 pelo seu valor porque queremos determinar a energia U em função de F_1.

Substituindo em 14) as letras pelos seus valores e efectuando operações, vem:

$$\begin{cases} T_{13} - T_{15} = -4\ F_1 \\ 5{,}12\ T_{12} + 4\ T_{13} + 4\ T_{15} = 4060 + F_1 \\ 0{,}64\ T_{12} + T_{13} + T_{15} = 1015 + F_1\ . \end{cases}$$

Resolvido êste sistema, obtém-se a solução:

$$\begin{cases} T_{12} = -1{,}17\ F_1 \\ T_{13} = -1{,}125\, F_1 + 507{,}5 \\ T_{15} = 2{,}875\, F_1 + 507{,}5\ . \end{cases}$$

Do mesmo modo se estabeleceriam as equações de equilíbrio do nó P_2 no qual concorre a barra $P_1 P_2$ cuja tensão T_{12} já determinámos. Obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} T_{23} - T_{25} = 0 \\ T_{24} = -2{,}335\ F_1 \\ T_{23} + T_{24} + T_{25} = -0{,}585\ F_1\ , \end{cases}$$

que resolvido fornece:

$$\begin{cases} T_{23} = T_{25} = 0{,}875\ F_1 \\ T_{24} = -2{,}335\ F_1\ . \end{cases}$$

Para calcularmos δ_1 convém organizar o seguinte quadro:

Barras $P_i P_j$	Comprimentos L_{ij} (cm)	Tensões T_{ij} (kg)	Coeficientes C_{ij1}	Produtos $L_{ij} T_{ij} C_{ij1}$
$P_1 P_2$	1120	— 1170	— 1,17	$1{,}53 \times 10^6$
$P_1 P_3$	1435	— 617,5	— 1,125	0,996
$P_1 P_5$	1435	3382	2,875	13,96
$P_2 P_3$	560	875	0,875	0,429
$P_2 P_4$	560	— 2335	— 2,335	3,04
$P_2 P_5$	560	875	0,875	0,429

$$\Sigma L_{ij} T_{ij} C_{ij1} = 20{,}38 \times 10^6 \text{ kg/cm}\ .$$

portanto:

$$\delta_1 = \frac{20{,}38 \times 10^6}{2 \times 10^6 \times 5}\ , \qquad \delta_1 = 2{,}04 \text{ cm}\ .$$

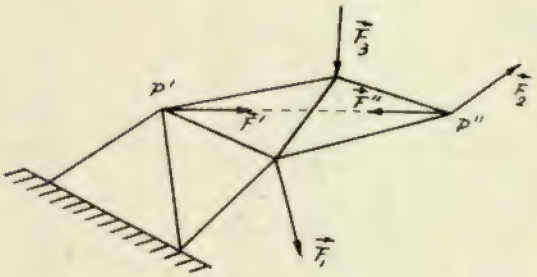


Fig. 19

d) No estudo da deformação dum sistema triangulado, é por vezes necessário conhecer a variação da distância entre dois nós P' e P'' do sistema.

Êste problema pode ser resolvido com o auxílio do primeiro teorema de Castigliano.

Apliquemos em P' e P'' duas fôrças $\overline{F'}$ e $\overline{F''}$ com a direcção de P' P'' e de sentidos contrários. A variação, δ, da distância entre os dois nós P' e P'', é dada pela expressão:

$$\delta = \left(\frac{\partial U}{\partial F'} + \frac{\partial U}{\partial F''}\right)_{F'=F''=0}\ ,$$

em virtude dos deslocamentos serem pequenos.

É:

$$U = f(F_1, F_2, \ldots F_n, F', F'').$$

Façamos $F' = F''$; U passa a ser função sòmente de $F_1, F_2, \ldots F_n$ e F':

$$U = \varphi(F_1, F_2, \ldots F_n, F').$$

É:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial F'} = \frac{\partial f}{\partial F'} + \frac{\partial f}{\partial F''}, \quad \text{visto } \frac{d F''}{d F'} = 1.$$

Portanto:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial F'}\right)_{F'=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial F'}\right)_{F'=F''=0} + \left(\frac{\partial f}{\partial F''}\right)_{F'=F''=0}.$$

Isto é, para determinarmos δ, basta aplicar em P' e P'' duas fôrças dirigidas segundo $P' P''$, com sentidos contrários e com a mesma grandeza F', determinar a expressão da energia U em função de F' e das grandezas das restantes fôrças, e calcular:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial F'}\right)_{F'=0}, \text{ donde: } \delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{L_i}{E_i S_i}\left(T_i \frac{\partial T_i}{\partial F'}\right)_{F'=0}.$$

Êste problema foi resolvido pela primeira vez por Maxwell.

e) Até agora temos aplicado o primeiro teorema de Castigliano a sistemas constituídos por peças submetidas sòmente a uma tracção ou compressão. Mas, dum modo geral, êste teorema presta-se à determinação dos deslocamentos lineares e angulares desde que saibamos determinar a expressão da energia de deformação elástica em função das grandezas das fôrças e dos momentos dos binários actuantes.

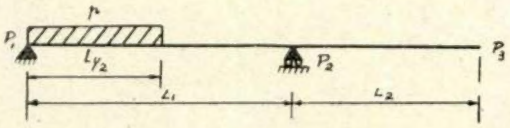


Fig. 20

Assim resolvamos o seguinte problema: dada a viga de secção constante representada na fig. 20 calcular a flecha em P_3 e a rotação da secção que passa por êste ponto.

Se designarmos por M o momento flector numa secção da viga de abcissa x contada, por exemplo, a partir de P_1, a energia de deformação elástica é dada aproximadamente, como veremos na alínea 12), por:

$$U = \int_0^{L_1+L_2} \frac{M^2 \, d x}{2 E I},$$

onde E representa o módulo de elasticidade da substância da viga e I o momento de inércia da secção em relação a um eixo que passa pelo centro de gravidade e é perpendicular ao plano da flexão.

Para calcularmos a flecha δ_3 no ponto P_3, temos de aplicar, como dissémos, uma fôrça auxiliar vertical $\vec{F}_3$. É:

$$\delta_3 = \left(\frac{\partial U}{\partial F_3}\right)_{F_3=0},$$

isto é

$$\delta_3 = \frac{1}{EI}\int_0^{L_1+L_2}\left(M\frac{\partial M}{\partial F_3}\right)_{F_3=0} dx .$$

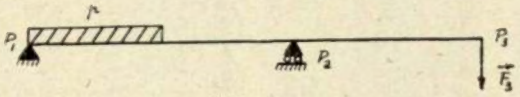


Fig. 21

O momento flector M é uma função de x que não pode ser representada pela mesma expressão analítica em todo o intervalo de integração:

$$M = \begin{cases} \frac{3}{8} p L_1 x - \frac{p x^2}{2} - F_3 \frac{L_2}{L_1} x \longrightarrow & \text{no intervalo } \left(o, \frac{L_1}{2}\right) \\ \frac{3}{8} p L_1 x - \frac{p L_1}{2}\left(x - \frac{L_1}{4}\right) - F_3 \frac{L_2}{L_1} x \rightarrow & \text{no intervalo } \left(\frac{L_1}{2}, L_1\right) \\ -F_3 (L_1 + L_2 - x) \longrightarrow & \text{no intervalo } (L_1, L_1 + L_2) \end{cases}$$

A derivada $\frac{\partial M}{\partial F_3}$ tem o valor:

$$\frac{\partial M}{\partial F_3} = \begin{cases} -\frac{L_2}{L_1} x \longrightarrow & \text{no intervalo } (O, L_1) \\ -(L_1 + L_2 - x) \rightarrow & \text{no intervalo } (L_1, L_1 + L_2) . \end{cases}$$

Portanto:

$$\delta_3 = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{L_1}{2}}\left(\frac{3}{8} p L_1 x - \frac{p x^2}{2}\right)\frac{-L_2}{L_1} x\,dx + \int_{\frac{L_1}{2}}^{L_1}\left[\frac{3}{8} p L_1 x - \frac{p L_1}{2}\left(x - \frac{L_1}{4}\right)\right]\frac{-L_2}{L_1} x\,dx\right\},$$

donde:

$$\delta_3 = -\frac{7}{384}\frac{p L_1^5 L_2}{E I} .$$

O sinal menos indica que o deslocamento de P_3 se dá de baixo para cima (sentido contrário ao de $\vec{F_3}$).

Para calcularmos a rotação α da secção que passa por P_3, temos de aplicar nesta secção um binário auxiliar. Seja M_3 a grandeza do seu momento.

É:

$$\alpha = \left(\frac{\partial U}{\partial M_3}\right)_{M_3=0},$$

donde:

$$\alpha = \frac{1}{EI}\int_0^{L_1+L_2}\left(M\,\frac{\partial M}{\partial M_3}\right)_{M_3=0} dx\,.$$

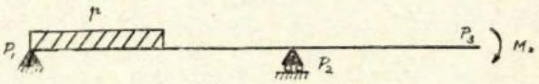


Fig. 22

O momento flector tem a expressão:

$$M = \begin{cases} \frac{3}{8}\,p\,L_1\,x - \frac{p\,x^2}{2} - \frac{M_3}{L_1}\,x \longrightarrow \text{no intervalo } \left(O, \frac{L_1}{2}\right) \\ \frac{3}{8}\,p\,L_1\,x - \frac{p\,L_1}{2}\left(x - \frac{L_1}{4}\right) - \frac{M_3}{L_1}\,x \rightarrow \text{no intervalo } \left(\frac{L_1}{2}, L_1\right) \\ -M_3 \longrightarrow \text{no intervalo } (L_1, L_1 + L_2)\,. \end{cases}$$

A derivada $\frac{\partial M}{\partial M_3}$ tem o valor:

$$\frac{\partial M}{\partial M_3} = \begin{cases} -\frac{x}{L_1} \rightarrow \text{no intervalo } (O, L_1) \\ -1 \longrightarrow \text{no intervalo } (L_1, L_1 + L_2)\,. \end{cases}$$

Portanto:

$$\alpha = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{\frac{L_1}{2}}\left(\frac{3}{8}\,p\,L_1\,x - \frac{p\,x^2}{2}\right)\frac{-x}{L_1}\,dx + \int_{\frac{L_1}{2}}^{L_1}\left[\frac{3}{8}\,p\,L_1\,x - \frac{p\,L_1}{2}\left(x - \frac{L_1}{4}\right)\frac{-x}{L_1}\right]dx\right\}.$$

Efectuando as operações, vem:

$$\alpha = -\frac{7}{384}\,\frac{p\,L_1^3}{EI}$$

O sinal menos indica que a rotação se dá em sentido contrário ao indicado na figura 22.

(Continua no próximo número)

O tabuleiro das pontes tipo «Bow-string» de betão armado

POR EDGAR CARDOSO

Engenheiro Adjunto da Divisão de Pontes da J. A. E.

Extracto dum trabalho subsidiado pelo Instituto para a Alta Cultura

1 — Generalidades

Um dos elementos constitutivos mais importantes das pontes é, sem dúvida, o tabuleiro, particularmente quando êste é a parte inferior da superestrutura.

Na realidade, quando as condições do problema a resolver obrigam a empregar um tipo de ponte de tabuleiro inferior, é porque não convém, técnica ou econòmicamente, subir a razante de forma a poder aplicar-se qualquer outro tipo de construção que dê passagem às águas das cheias ou às embarcações, quando da travessia de rios, ou que permita a passagem inferior dos camiões ou combóios quando se trate de obras de arte sôbre vias de comunicação, etc., etc. Somos então obrigados a reduzir o mais possível a *altura perdida* entre a parte mais baixa do tabuleiro e o nível da razante; e dizemos *perdida* porque reduz a vazão ou «gabarit» inferior e eleva as estradas de acesso, perdendo-se material e gastando-se inùtilmente energia quando é necessário subir para depois descer o que freqüentemente acontece, nessas pontes.

Ora, nas pontes de estrada, quando de tabuleiro inferior, só existem, geralmente, dois elementos principais — vigas ou arcos — que suportam o tabuleiro. Entre êsses elementos corre a faixa de rolagem e os passeios, ou a faixa de rolagem e as vigas de protecção dos elementos principais, se os passeios se inserem em consola. Em qualquer dos casos, o afastamento das vigas principais é da ordem dos 7 a 10 metros para as nossas estradas nacionais, o que parece ser impossível de vencer por uma simples laje, de betão armado, sem nervuras.

De facto, é sabido e já até é regra que a laje sem nervuras se torna anti-económica para vãos superiores a 2 ou 2,5 metros; é preferível, então, recorrer às lajes vigadas.

E assim, ao projectar-se um tabuleiro, em questão, começa-se por, «à priori», introduzir carlingas entre as vigas principais para apoio da laje, tal como se indica por exemplo no desenho n.º 1, laje que passa a ser calculada com o vão igual ao afastamento entre carlingas.

É ainda vulgar colocarem-se longarinas entre as carlingas para se calcular a laje segundo duas direcções ou para servirem de contraventamentos. Estuda-se, então, qual o afastamento mais económico a dar às carlingas e que regula, como dissemos já, por 2,00 a 2,50 m.

Mas, como se calcula uma destas carlingas e quais são as sobrecargas que a solicitam?

Em geral, consideram-se simplesmente apoiadas nas vigas principais porque estas não têm rigidez suficiente à torção ou, os montantes que se lhe inserem normal e verticalmente não permitem considerá-los como elementos dum pórtico.

As sobrecargas são, em geral, as rodas mais pesadas do maior número de auto-camiões que caibam na largura da ponte, o que, segundo